ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE

Concours d'admission 1981

Centres à l'étranger

Programme M — MATHEMATIQUES I — (4 h)

(Deux pages dactylographiées.)

N.B. Les parties II, III et IV sont indépendantes entre elles.
Dans tout le problème, on désigne par J l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et par f la restriction à J de la fonction tangente (application de J dans $\mathbb{R}$).

Partie I.

I.1°- Montrer que f est l'unique solution de l'équation différentielle : $y' = 1 + y^2$ qui soit définie sur J.

I.2°- a) Montrer que f est indéfiniment dérivable.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $f^{(n+1)}$ en fonction de $f^{(0)}$, $f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}$, ($f^{(0)}$ et $f^{(1)}$ désignant respectivement f et f').

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, vérifier : $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$; exprimer a_{n+1} en fonction de $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, vérifier : $f(x) \geqslant \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Partie II

II.1°- a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier : $a_{2n} = 0$.

b) Calculer a_1, a_3, a_5 et a_7.

II.2°- a) Vérifier que la suite $n \longmapsto a_{2n+1}$ est décroissante.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier : $\frac{2n+1}{2n} a_{2n+1} \leqslant a_{2n-1}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier : $a_{2n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier : $a_{2n+1} \leqslant \frac{1}{2n+1} \int_{-1}^{n} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(n-x)}}$.

et en déduire un majorant de a_{2n+1} de la forme $\frac{A}{2n+1}$.

Partie III

III.1°- On note R et ϕ le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum a_n x^n$.

a) Vérifier : $R \geqslant \frac{\pi}{2}$

b) Montrer que f et ϕ coïncident sur J.

c) Déterminer R.

d) Quelle est la nature de la série numérique $\sum a_n (\frac{\pi}{2})^n$?

e) Montrer qu'à tout $h \in \mathbb{R}_+$, on peut associer $B \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{2n+1} \leqslant \frac{B}{(2n+1)^h} .$$

.../...

III.2°- On note R_1 et ϕ_1 le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum n^2 a_n x^n$. Déterminer R_1 et expliciter $\phi_1(x)$ pour $|x| < R_1$.

Partie IV

On note g l'application de J dans $\mathbb{R}$ définie par :

$g(0) = 0$; $g(x) = \cotg x - \frac{1}{x}$ si $x \in J \setminus \{0\}$.

IV.1°- Montrer que g est indéfiniment dérivable.

IV.2°- a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver un infiniment grand équivalent à $\cotg^{(n)}(x)$ au voisinage de 0.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver un infiniment grand équivalent à $f^{(n)}(x)$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ (à gauche).

IV.3°- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que le seul élément $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant :

$$\forall x \in J \qquad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f^{(k)}(x) = 0$$

est $(0,0,\ldots,0)$.

Partie V.

$\mathcal{F}$ désigne l'algèbre des applications de J dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note f^n l'application $x \longmapsto \tg^n x$ de J dans R, et F_n le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par $(1, f, f^2, \ldots, f^n)$.

E_0 est F_0 ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E_n est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par $(1, f, f', \ldots, f^{(n-1)})$.

V.1°- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier :

a) $E_n \subset F_n$;

b) $(1, f, f', \ldots, f^{(n-1)})$ est une base de E_n ;

c) $E_n^* = F_n$.

V.2°- On note : $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

a) Montrer que E est une sous-algèbre de $\mathcal{F}$ et que l'application θ qui, au polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe l'élément P(f) de $\mathcal{F}$ défini par :

$$\forall x \in J \qquad P(f)(x) = P(f(x))$$

est un isomorphisme d'algèbres de $\mathbb{R}[X]$ sur E.
L'anneau E est-il intègre ? Que peut-on dire de ses idéaux ?

b) Pour $\alpha \in J$ donné, étudier l'ensemble $I_\alpha = \{ h \in E \mid h(\alpha) = 0 \}$.

*****
***
*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail